

A MATEMÁTICA COM OS FRACTAIS

**Paulo Eduardo Frinhani¹, Hellen Cristine Prata de Oliveira², Íris Felix de Brito³,
Lidiane Hott de Fúcio Borges³**

¹ Graduado em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Alegre – ES. Mestre em Economia Empresarial pela Universidade Candido Mendes – RJ e Mestre em Educação Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo. Professor da Faculdade de Ciências Gerenciais de Manhuaçu – MG, das Faculdades Doctum e da Faculdade de Tecnologia São Francisco.

² Graduada em Física pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Santa Marcelina de Muriaé – MG. Mestre em Engenharia e Ciências dos Materiais pela Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro – RJ. Doutora em Engenharia e Ciências dos Materiais pela UENF. Pós-doutoramento no Instituto Superior Técnico de Lisboa – Portugal.

³ Aluna do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Gerenciais de Manhuaçu- MG.

⁴ Graduada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras Santa Marcelina de Muriaé – MG. Pós Graduada em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras – MG. Mestre em Engenharia e Ciências dos Materiais pela Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro – RJ. Professora e Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Gerenciais de Manhuaçu.

RESUMO

O presente artigo tem como finalidade socializar aos leitores as possibilidades de observar que os fractais constituem um campo de investigação gigantesco na matemática atual e que apresentam propriedades fascinantes capazes de serem compreendidas por meio de sua beleza, aspectos, características e semelhanças. A identificação de métodos de ensino da geometria por meio dos fractais e de suas estruturas geométricas é relevante uma vez que a geometria fractal é um ramo da matemática que não é vista nas salas de aula, com base nisso, destaca-se a importância desse conhecimento ser divulgado para alunos e professores.

Palavras-chave: Matemática; Fractais; Geometria Fractal.

ABSTRACT

The purpose of this study is to socialize the readers with the possibilities of observe that the fractals consist in a giant research in the actual mathematic and they show fascinating properties that may be comprised for their beauty, aspects, characteristics and similarities. The finding of geometry teaching methods using fractals and their geometric structures is relevant since the fractal geometry is a part of mathematic that is not seen by the students in school. This knowledge need to be expanded to students and professors.

Keywords: Mathematic; Fractals; Fractal Geometry.

1. INTRODUÇÃO

Busca-se levantar informações sobre os métodos de ensino da geometria

por meio dos fractais, despertando a curiosidade dos alunos e identificando suas formas na natureza. Existe a necessidade de identificar métodos de

ensino da geometria por meio dos fractais e de suas estruturas geométricas com intuito de divulgar o conhecimento para alunos e professores já que a geometria fractal é um ramo da matemática que não é vista nas salas de aula. É possível observar as propriedades e o comportamento dos fractais usando a matemática.

Através dessa pesquisa bibliográfica, pretende-se ressaltar a importância do uso dos fractais no ensino da matemática e relacionar os diversos tipos de fractais existentes.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. DEFINIÇÃO DE FRACTAL

Os fractais são aplicados em ciência, tecnologia e arte usadas em computadores. São objetos geométricos que podem ser divididos em partes e cada uma pode ser semelhante à original. Os fractais têm infinitos detalhes, geralmente são auto-similares e independentes de uma escala; são de beleza e complexidade infinita e ligados as formas da natureza.

Segundo Capra (2004 p.118), “a noção de fractal, ilustra a propriedade da “auto-similaridade”, como por exemplo, um pedaço de uma couve-flor arrancado”. Para o autor, essa demonstração de dividir em partes, associa-se a forma do todo que é semelhante a si mesmo em todos os níveis de escala.

Para Moreira (1999), os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. Porém, somente há poucos anos, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos computadores, a Geometria Fractal vem se consolidando. De acordo com Morais (2007, p. 10).

A propriedade mais notável dessas formas “fractais” é que seus padrões característicos, sua repetição encontrada em escala descendente, de modo que suas partes, em qualquer escala, são na forma, semelhantes ao todo e subdividindo indefinidamente em partes.

Para Morais (2007), os fractais que surgem por meio dos computadores são belos, fascinantes e possuem uma infinita estrutura e complexidade, chamando a atenção das pessoas pela sua estética, sendo assim reconhecidos até pelo mundo das artes. Os fractais além de serem usados nas artes, podem ser também encontrados na música, no cinema e em outras áreas de estudo como na Arquitetura e no Urbanismo.

Nesse sentido, uma definição clássica para esse estudo é demonstrada por Stewart (1996, p.12) que diz que: “os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores”.

Assim, para este autor, o fractal é um objeto que não perde a sua definição formal à medida que é ampliado inúmeras vezes, mantendo a sua estrutura idêntica à original.

2.2. ESTRUTURA E CLASSIFICAÇÃO DOS FRACTAIS

A estrutura dos fractais pode ser classificada em três categorias principais. Essas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado.

1ª - Sistema de funções iteradas: De acordo com Fractal (2006), os fractais determinísticos, também conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo; possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicada a cada iteração como, por exemplo, a curva de Peano, o floco de neve de Koch e a esponja de Menger.

Para a Universidade de Lisboa (2006,) a curva de Peano apresentada em 1890 por Giuseppe Peano (1858 – 1932) é um exemplo de fractal geométrico que preenche o plano. Nesse sentido, estudos da universidade mostram uma curva que preenche o plano, passa por todos os pontos de uma área, acabando por ocupá-la na totalidade. Assim, o ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento. O estudo mostra que, na 1ª etapa, o segmento é substituído por nove

segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial (primeira imagem da figura 1). Esses novos segmentos constituem a primeira etapa da construção da curva de Peano. Depois, o processo aplica-se a cada um dos nove segmentos, até o infinito.

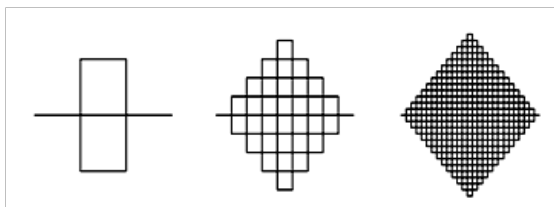


Figura 1. Construção da Curva de Peano (Universidade de Lisboa 2006).

Para Giuseppe Peano (1890), a curva de Peano, levando a construção anterior ao infinito, será uma superfície toda preenchida; deduz-se que será um losango.

Para os autores Secco e Rocha (2004), o floco de neve de Koch é um fractal geométrico clássico, simples de ser entendido. Assim, os autores afirmam que, partindo de um triângulo equilátero, divide-se cada lado em três segmentos – (figura 2).

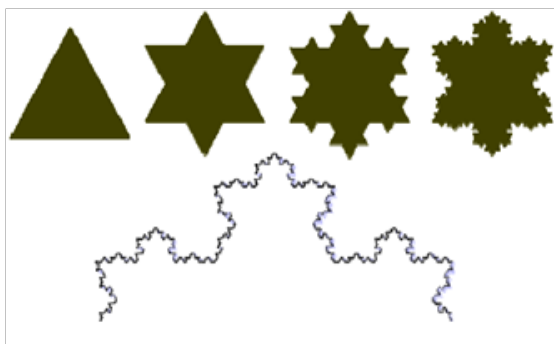


Figura 2. Construção da Curva de Peano (Universidade de Lisboa 2006).

Além disso, temos a esponja de Menger (figura 3), que faz referência ao matemático austríaco Karl Menger (1902-1985), seu criador, denominado um dos mais curiosos. Para o autor Machado Neto (2004), podemos obter a esponja de Menger a partir de um cubo, dividindo-o em 27 cubinhos de arestas com $1/3$ do tamanho da aresta original, removendo a peça central e cada um dos seis cubos centrais de cada face, ou seja, sete dos

27 cubinhos são removidos. A partir desse estágio, repete-se o processo com os 20 cubinhos restantes e, assim por diante, infinitas vezes.

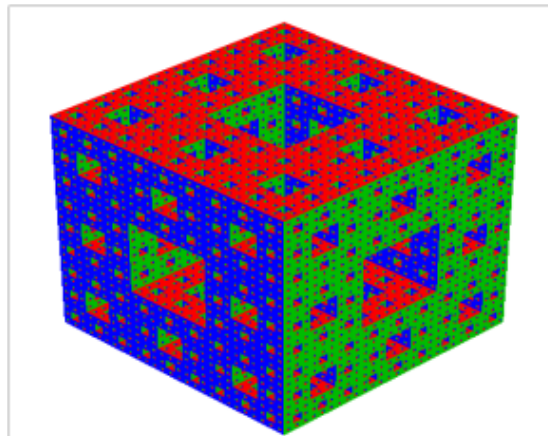


Figura 3. Esponja de Menger, terceiro estágio (UFRJ 2007).

2ª - Fractais gerados por computadores:

Para Fernandes (2007), os fractais gerados por computadores são chamados de fractais de fuga. Um exemplo desse tipo é o conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos, uma figura tão complexa que seria impossível conhecê-la ao longo de uma vida inteira.

3ª - Fractais aleatórios:

“São chamados os fractais naturais, quando o todo é semelhante a uma parte ampliada dizemos que ele é um fractal aleatório” (FERNANDES, 2007.p.18). Um exemplo é o relâmpago.



Figura 4. Relâmpagos (Universidade de Lisboa 2007).

Fernandes (2007) define outros três tipos de auto-similaridade: auto-similaridade exata, que é a forma mais

marcante, o fractal é idêntico em diferentes escalas; quase auto-similaridade, é uma forma mais solta, o fractal é aproximadamente idêntico em escalas diferentes; auto-similaridade estatística, o fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas.

É importante frisar que nem todo objeto auto-similares são fractais. Fernandes (2007) nos mostra como exemplo que uma linha Euclidiana é exatamente auto-similar, mas o argumento de que objetos Euclidianos são fractais é defendido por poucos.

2.3. FRACTAIS NA NATUREZA

Para Stewart (1996), as formas encontradas nos animais e nas plantas chamam a atenção dos matemáticos há muitos anos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas do mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Ou, até mesmo, no modo do ser humano de padronizar seus movimentos em sincronia com as condições diárias.

Para Fernandes (2007), a simetria da natureza é também, muitas vezes, imperfeita, existindo outra categoria de padrões naturais, padrões que existem onde pensávamos que tudo era aleatório e sem forma, esses padrões são chamados de fractais.

Para Santos; Oliveira (2004) Os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em toda a ciência, desde o aspecto das nuvens, montanhas, árvores e relâmpagos, até à distribuição das galáxias, assim como na arte e na matemática.

Assim, pode-se perceber que os fractais naturais estão a nossa volta o tempo todo. Basta observar as nuvens, as montanhas, os rios e seus afluentes, os sistemas de vasos sanguíneos, como nos afirma o autor Fernandes (2007) que assim começa a perceber algumas propriedades dos fractais.

De acordo com a Universidade de Lisboa (2006), considera-se que alguns objetos da natureza, como montanhas,

árvores e plantas, têm propriedades fractais.



Figura 5: Imagem de uma planta com ramificações (Universidade de Lisboa 2007).

Na figura 5, a planta apresenta a propriedade de auto-semelhança, característica dos fractais. Essas propriedades sugerem uma ligação entre os fractais e a natureza.

Como mostra Fernandes (2007), árvores, montanhas e samambaias são fractais naturais que podem ser modelados em computadores que usam algoritmos recursivos.

2.4. GEOMETRIA FRACTAL

Para Fernandes (2007), foi da necessidade de se calcular e descrever certos fenômenos da natureza ou objetos intrincados que não possuem forma definida que surgiu a Geometria Fractal. Esse estudo apresenta estruturas geometricamente complexas e infinitamente variadas. Sua nomenclatura se origina do adjetivo em latim *fractus*.

Barbosa (2005) evidencia que, por meio dos fractais, existem várias conexões com todas as ciências, sendo a geometria de fractais um meio de sanar as deficiências da Geometria Euclidiana, podendo assim explorar um estudo de formas da natureza que podem ser minimizadas para despertar e desenvolver o senso estético com o estudo da arte aplicada à construção de fractais, possibilitando provocar nos alunos a sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

De acordo com Moreira (1999 *apud* Nicoline, 2005, p.5), “os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas”.

Nesse sentido, a geometria de Fractal, segundo o autor, deu origem a essa parte da matemática: “a geometria fractal é o ramo da Matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais (FRACTAL 2006, p. 5)”. Para o autor, muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica podem ser explicadas e estudadas pelas propriedades dos fractais aplicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador.

Utilizando certos programas, é possível encontrar a dimensão fractal de uma costa marítima ou a fronteira de algum país, essas medidas variam de acordo com a escala utilizada para medição, quanto menor a escala, a medida do contorno aumenta, provando que esses são realmente fractais; pois, quando nos aproximamos, vão aparecendo cada vez mais detalhes.

A Teoria do Caos pode ser considerada como a teoria que deu origem ao estudo de objetos e formas complexas, até então não estudadas e que eram consideradas desorganizadas, mas que, na verdade, possuíam sequências de detalhes em comum. Essas formas e objetos são atualmente chamados de fractais.

Para Rezende e Versignassi (2006), por essa teoria que explica coisas infinitamente complexas, passou a fazer parte dessa nova ciência, a Teoria do Caos.

Conforme Secco e Rocha (2004), a Teoria do Caos pode ser vista como um universo com sistemas, ou um conjunto de objetos que interrelacionam, extremamente sensíveis às condições iniciais, uma simples alteração poderá levar a uma mudança no resultado. Sistemas caóticos são indeterminísticos, seus resultados não são possíveis de serem previstos e seu comportamento não é periódico.

A geometria fractal está intimamente ligada à Teoria do Caos. São as estruturas quebradas, complexas, estranhas e belas desta geometria, que conferem certa ordem ao caos, e esta é muitas vezes caracterizada como sendo a linguagem do caos (SANTOS; OLIVEIRA, 2004).

2.5. APLICAÇÕES DOS FRACTAIS E SUA GEOMETRIA

Estudos nessa área mostram que existem muitas conexões entre a geometria e a matemática, que envolvem padrões geométricos e numéricos aos quais os conceitos de medidas, sucessões, interações e limites adicionam novas ideias com a auto-semelhança e a dimensão de fractais.

Para Oliveira (1994), a aplicação de fractais na área das ciências matemáticas vem sendo utilizadas com frequência por biólogos, para ajudar a compreender o crescimento das plantas; por físicos, possibilitando o estudo de superfícies irregulares; por médicos, para uma nova visão da anatomia interna do corpo humano e por muitas outras áreas científicas que permitem identificar e descrever certos fenômenos da natureza ou objetos intrincados que não possuem forma definida.

O impacto dos fractais e da geometria fractal é bastante evidente já que cada vez mais estudos revelam novas aplicações dos seus conceitos.

Há outras áreas de ligação onde podem ser encontrados fractais, a saber: nas artes, na música, no cinema e na Arquitetura e Urbanismo.

Nas Artes, quando um computador é alimentado com equações, criam-se magníficas imagens abstratas. Essas imagens geradas por computadores são resultados de iterações, feitas de uma forma que possibilitam a quem olhe imagens belíssimas (figura 6).



Figura 6. Fractais artísticos gerados por computador (Universidade de Lisboa 2006).

2.6. FRACTAIS NA SALA DE AULA

As afirmações dos teóricos mencionados na revisão de literatura mostram que os fractais podem ser explorados no desenvolvimento de várias áreas da ciência e que abordam diversos conteúdos da matemática; como por exemplo, na álgebra, na geometria, no cálculo, na modelagem matemática e nos números complexos. Tendo sempre o propósito de despertar o interesse dos educandos, pelas formas, cores e luminosidade.

Para que o estudo dos fractais seja levado até a sala de aula, inicialmente, é necessária uma revisão dos conteúdos de

geometria plana e espacial. Para um segundo momento, o professor deve apresentar imagens com propriedades fractais como a imagem seguinte da Universidade de Lisboa (2006):

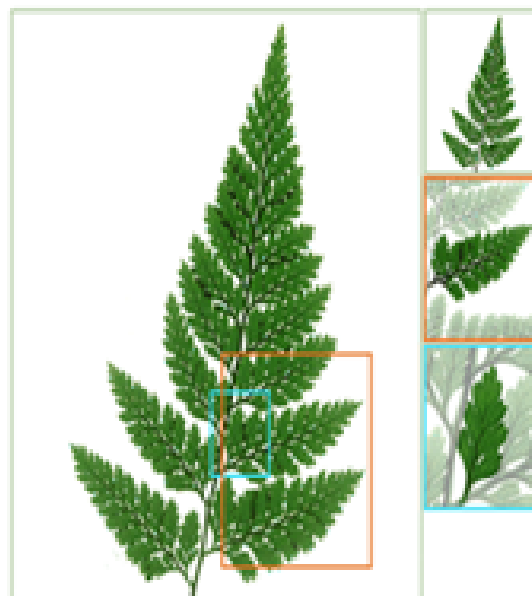


Figura 7. Imagem de uma planta com propriedades fractais (Universidade de Lisboa 2006).

Segundo a Universidade de Lisboa (2006), é importante considerar objetos da natureza, como montanhas, árvores e plantas que tem propriedades fractais a fim de associar o ensino da geometria ao estudo do meio ambiente.

Para Fernandes (2007), árvores, montanhas e samambaias são fractais naturais que podem ser modelados em computadores que usam algoritmos recursivos. Para o autor, essa propriedade de repetitividade fica clara em exemplos como este; pois num ramo de uma árvore ou na folhagem de uma samambaia pode ser observada uma réplica em miniatura do todo. Não idêntico, porém semelhante na estrutura.

Para Geloneze Neto (2001), assim como para Siqueira (2005), a geometria fractal é uma nova linguagem que possibilita ao professor explorar formas desconhecidas do cotidiano dos alunos num ambiente matemático cheio de propriedades e conceitos geométricos que podem ser utilizados nas diversas áreas da matemática.

3. CONCLUSÃO

Os fractais podem ser explorados no desenvolvimento de diversos conteúdos; como na álgebra, na geometria, no cálculo, na modelagem matemática e nos números complexos com o propósito de despertar o interesse dos educandos, pelas formas, cores e luminosidade que essas imagens apresentam ao serem criadas no computador e quando se trabalha com recursos audiovisuais.

Cumpra lembrar que a presente pesquisa apresenta-se apenas de cunho bibliográfico abordando os fractais e a geometria a partir de consultas em revistas, jornais, livros, artigos, dissertações e acervos de bibliotecas e websites. De acordo com Gil (2007, p. 44), pesquisas deste tipo são “[...] desenvolvidas com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros, dissertações, teses e artigos científicos”.

Através deste levantamento bibliográfico, há a possibilidade de aplicação do uso de fractais nas diversas áreas da matemática no ensino médio e o discernimento do assunto no ensino da matemática.

4. REFERÊNCIAS

FERNANDES, J. A. **Fractais: Uma nova visão da Matemática**. 2007. 45f. Monografia (Graduação em Matemática). Centro Universitário de Lavras - UNILAVRAS, Lavras.

SANTOS, C; OLIVEIRA, A. A. **Fractais**. Universidade Federal de São Carlos. Disponível em : <http://www2.dm.ufscar.br/~caetano/iae2004/G9/historico.html>. Acesso em 10 abr 2014.

SECCO, F. R.; ROCHA, T. T. Trabalho apresentado ao curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~l3c/artigos/fractais.pdf>. Acesso em 12 mar 2014.

SIQUEIRA, R. Desenvolvido por um grupo de pesquisadores, **Fractarte**. Disponível em:

<http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>. Acesso em 26 mar 2014.

STEWART, I. **Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Ed. Rocco, 1996. 122p.

UFRJ. Desenvolvido pelo Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em:

<http://omnis.if.ufrj.br/~tclp/DimFractal.ppt>
Acesso em 27 mar 2014.

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2006. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fractais.htm>. Acesso em 11 mar 2014.

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2007. Desenvolvido pelo Centro de Física Teórica e Computacional. Disponível em:

<http://cftc.cii.fc.ul.pt/coccix/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>. Acesso em 11 abr 2014.

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2006. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências. Disponível em:

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/principal.htm>. Acesso em 11 mar 2014.

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2006. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências. Disponível em:

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fractais.htm>. Acesso em 10 mar 2014.